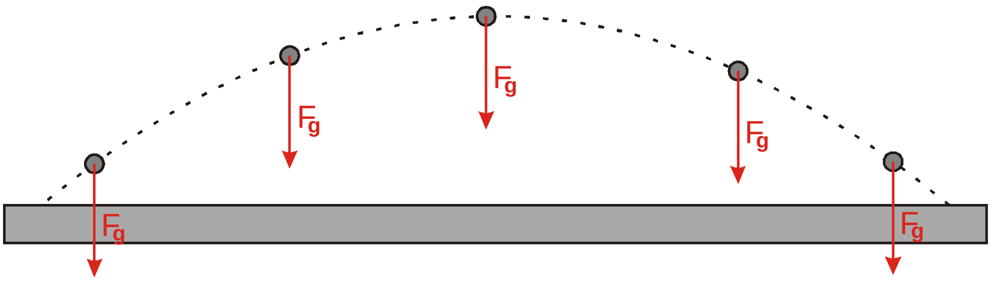
1.6.6 Šikmý vrh

Předpoklady: 1605

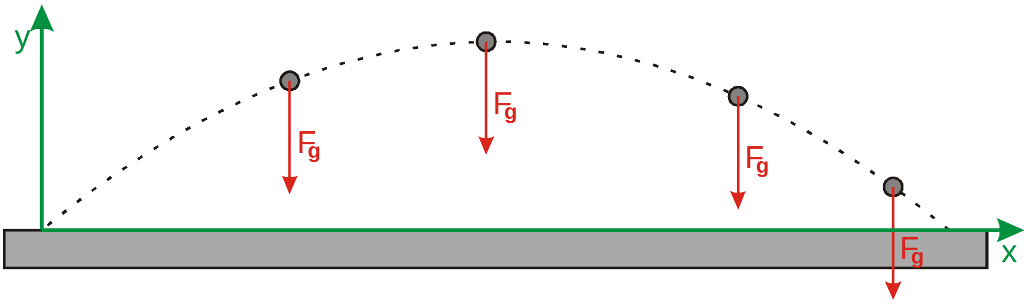
Šikmý vrh – nejčastější způsob házení předmětů. Házíme z velmi malé výšky nad vodorovnou rovinou (tuto výšku pak zanedbáváme) šikmo vzhůru (hod kriketovým míčkem, oštěpem nebo sněhovou koulí, střelba z děla).

Př. 1: Zakresli do obrázku trajektorii míčku vrženého šikmo vzhůru. Do obrázku nakresli několik poloh míčku a vyznač do každé polohy síly, které na míček působí. Odpor vzduchu zanedbej.



Během celého letu působí na míček pouze gravitační síla.

Trajektorií šikmého vrhu je stejně jako u vodorovného vrhu parabola.
Podobně jako u vodorovného vrhu volíme speciální soustavu souřadnic, abychom získali jednodušší výsledné vztahy.



Pedagogická poznámka: Hodně žáků v následujícím příkladu odvodí správné rovnice, ale zapomene rozlišovat rychlosti indexy (všude mají pouze v_0). Pokud převažují, napíšu na tabuli rovnice bez indexů u rychlostí a pokračuji dále, zeptám se jich na to ve chvíli, kdy se shodneme, že průběh vrhu závisí na počáteční rychlosti a úhlu. Pak se bavíme o tom, proč se úhel v jejich rovnicích nevyskytuje a která rychlost je ta jejich v_0.

Př. 2: Rozeber síly, které působí ve směrech obou souřadnic, a na základě rozboru rozhodni, jakým způsobem se kulička v daném směru pohybuje.

Vodorovný směr: Na míček ve vodorovném směru nepůsobí žádná síla $\Rightarrow$ kulička se ve vodorovném směru pohybuje rovnoměrně $\Rightarrow$

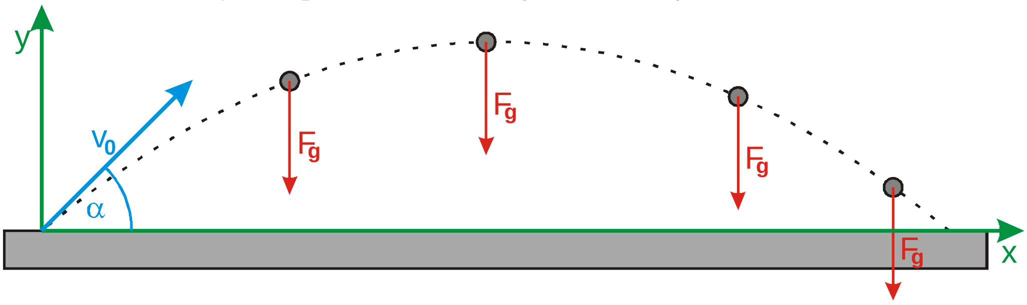
- $v_x = \text{konstanta} = v_{0x}$
- $x = v_x t = v_{0x} t$

Svislý směr: Na kuličku ve vodorovném směru působí gravitační síla $\Rightarrow$ kulička se ve svislém směru pohybuje rovnoměrně zrychleně $\Rightarrow$

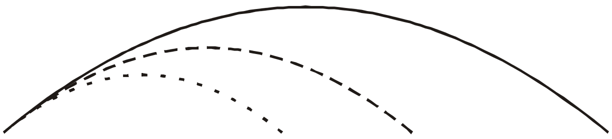
- $v_y = v_{0y} + at$, dosadíme $a = -g \Rightarrow v_y = v_{0y} - gt$
- $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$, dosadíme $y_0 = 0$, $a = -g \Rightarrow y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$.

Př. 3: Které veličiny (počáteční podmínky) rozhodují o průběhu vrhu (například jak daleko dohodíme, jaké výšky předmět dosáhne)?

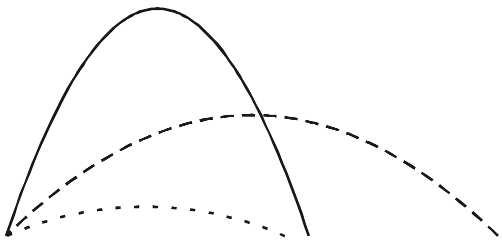
Průběh vrhu určují dvě počáteční hodnoty: velikost rychlosti a úhel vrhu.



Př. 4: Nakresli do jednoho obrázku trajektorie tří vrhů, které se liší:
a) počáteční rychlostí v_0 b) úhlem vrhu α.



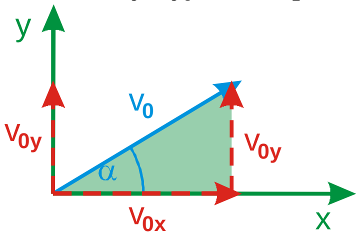
Při vzrůstající rychlosti se prodlužuje délka i výška vrhu.



Při zvyšování úhlu vrhu se nejdříve prodlužuje výška i délka vrhu. Od určité hodnoty úhlu začne délka vrhu klesat a zvyšuje se pouze jeho výška.

Př. 5: Předmět byl vržen šikmo rychlostí v_0, pod úhlem α. Urči v_{0x} a v_{0y}.

Obě složky vyjádříme pomocí goniometrických funkcí z vyznačeného trojúhelníku.



$\sin\alpha = \frac{v_{0y}}{v_0} \Rightarrow v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ $\cos\alpha = \frac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow v_{0x} = v_0 \cos\alpha$

Šikmý vrh probíhá ve vodorovném i svislém směru a je popsán těmito rovnicemi: vodorovný směr: $v_x = v_{0x}$**,** $x = v_{0x}t$ **, svislý směr:** $v_y = v_{0y} - gt$ **,** $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$**. Pro počáteční složky rychlosti platí vztahy:** $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$.

Př. 6: Lukostřelec vystřelil ze země šíp rychlostí 40 m/s pod úhlem $30°$.
a) Urči polohu a složky rychlosti šípu po uplynutí 1 s.
b) Urči polohu a složky rychlost šípu po uplynutí 2 s.
c) Urči výpočtem, jak daleko od lukostřelce šíp dopadne na zem.

Spočteme obě složky počáteční rychlosti: $v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 40 \cdot \cos 30° \,\text{m/s} = 34,6\,\text{m/s}$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha = 40 \cdot \sin 30° \,\text{m/s} = 20\,\text{m/s}$.

a) Urči polohu a složky rychlosti šípu po uplynutí 1 s.
Stačí dosadit do rovnic $t = 1\,\text{s}$.

$v_x = v_{0x} = 34,6\,\text{m/s}$, $x = v_{0x}t = 34,6 \cdot 1\,\text{m} = 34,6\,\text{m}$

$v_y = v_{0y} - gt = 20 - 10 \cdot 1\,\text{m/s} = 10\,\text{m/s}$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 20 \cdot 1 - \frac{1}{2}10 \cdot 1^2\,\text{m} = 15\,\text{m}$$

b) Urči polohu a složky rychlosti šípu po uplynutí 2 s.

$v_x = v_{0x} = 34,6\,\text{m/s}$, $x = v_{0x}t = 34,6 \cdot 2\,\text{m} = 69,2\,\text{m}$

$v_y = v_{0y} - gt = 20 - 10 \cdot 2\,\text{m/s} = 0\,\text{m/s}$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 20 \cdot 2 - \frac{1}{2}10 \cdot 2^2\,\text{m} = 20\,\text{m}$$

c) V čase $t = 2\,\text{s}$ byla rychlost šípu ve *y*-ovém směru nulová $\Rightarrow$ šíp byl právě v nejvyšším místě trajektorie $\Rightarrow$ poletí ještě dvě sekundy a urazí v *x*-ovém směru dalších 69,2 m $\Rightarrow$ dopadne do vzdálenosti 138,4 m od místa výstřelu.

Pedagogická poznámka: Bod c) předchozího příkladu se snaží vést žáky k tomu, aby automaticky zkoušeli interpretovat výsledky, které získají. I ty rychlejší spíše začnou vyjadřovat a složitě počítat čas letu, než by si uvědomili, už ho spočítali.

Př. 7: Najdi vzorec pro dostřel při šikmém vrhu s počáteční rychlostí v_0 a úhlem α.

Využijeme zkušeností z minulého příkladu: o době, kterou stráví předmět ve vzduchu rozhoduje pohyb ve svislém směru, pohyb vzhůru trvá stejně dlouhou dobu jako pohyb dolů, v nejvyšším místě trajektorie je svislá složka rychlosti nulová.

$v_y = v_{0y} - gt = 0$

$v_{0y} = gt$

$t = \frac{v_{0y}}{g}$ doba výstupu do nejvyššího bodu trajektorie $\Rightarrow$ doba letu $t_l = 2\frac{v_{0y}}{g}$.

Nyní můžeme dosadit do vztahu pro *x*-ovou souřadnici: $x_{max} = v_{0x}t = v_{0x}2\frac{v_{0y}}{g} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$.

Dodatek: Dobu letu můžeme získat i dvěma dalšími způsoby.

V okamžiku dopadu je *y*-ová souřadnice nulová $\Rightarrow$ $y = 0 = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$.

$v_{oy}t = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \frac{2v_{0y}}{g}$.

V okamžiku dopadu je *y*-ová složka rychlosti rovna opačné hodnotě než v okamžiku výstřelu: $v = -v_{0y} = v_{0y} - gt$.

$gt = 2v_{0y} \Rightarrow t = \frac{2v_{0y}}{g}$.

Získaný vztah můžeme upravit dosazením vztahů pro složky počáteční rychlosti:
$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$.

$$x_{max} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{2v_0\cos\alpha \cdot v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

Pro konečnou úpravu jsme využili vzorec $2\cos\alpha \cdot \sin\alpha = \sin 2\alpha$.

Př. 8: Najdi úhel, při kterém je délka vrhu s danou počáteční rychlostí největší.

Ve vztahu pro dolet vrhu $x_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$ vystupuje úhel uvnitř výrazu $\sin 2\alpha$ $\Rightarrow$ hledáme úhel, pro který je výraz $\sin 2\alpha$ maximální. Maximální hodnoty 1 dosahuje sinus pro úhel $90° \Rightarrow$ musí platit $2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$.
Největší délky vrhu dosáhneme, pokud předmět hodíme pod úhlem $45°$.

Př. 9: Urči rychlost, kterou musí pod ideálním úhlem hodit oštěpař svůj oštěp, aby hodil světový rekord 98,48 m (současná hodnota světového rekordu dosažená Janem Železným v roce 1996).

Ze vztahu pro délku vrhu: $x_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$ vyjádříme rychlost.

$g \cdot x_{max} = v_0^2 \cdot \sin 2\alpha$

$v_0^2 = \frac{g \cdot x_{max}}{\sin 2\alpha}$

$v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot x_{max}}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 98,48}{\sin(2 \cdot 45°)}}\ \text{m/s} = 31,4\ \text{m/s} = 113\ \text{km/h}$

Oštěpař musí za ideálních podmínek hodit oštěp rychlostí 113 km/h.

Př. 10: Odvoď vzorec pro maximální výšku šikmého vrhu. Urči, jak vysoko vystoupá oštěp při rekordním hodu z předchozího příkladu.

y-vá souřadnice je popsána rovnicí $y = v_o \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$.

Čas výstupu už jsme určili $t = t_v = \frac{v_{0y}}{g}$.

$$y_{max} = v_{0y} \cdot \left(\frac{v_{0y}}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2$$

$$y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_{0y}^2}{g^2} = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g} = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

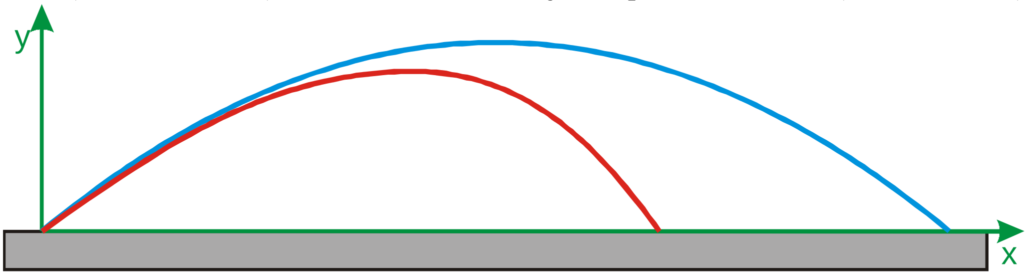
Dosadíme hodnoty z příkladu o hodu oštěpem: $v_0 = 31,4\,\mathrm{m/s}$, $\alpha = 45°$.

$$y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{31,4^2 \cdot \sin^2 45°}{2 \cdot 10}\,\mathrm{m} = 24,6\,\mathrm{m}.$$

Oštěp by při rekordním hodu vystoupal do výšky 24,6 m.

Př. 11: Nakresli obrázek trajektorie šikmého vrhu. Do obrázku nakresli trajektorii reálného vrhu (s nezanedbaným odporem vzduchu) se stejnou počáteční rychlostí i stejným úhlem vrhu.

Při reálném vrhu odpor vzduchu postupně zpomaluje pohyb předmětu $\Rightarrow$ zkrátí se dostřel, zmenší se maximální výška $\Rightarrow$ čím déle předmět letí, tím více se odlišuje trajektorie reálného vrhu (červená křivka) od vrhu se zanedbaným odporem vzduchu (modrá křivka).



Červená křivka se nazývá balistická křivka. Její analytický výpočet není v možnostech střední školy, dostupné je pouze numerické řešení.

Př. 12: Vypočti přibližně jako silou musel na oštěp působit Jan Železný při svém rekordním vrhu. Oštěp má hmotnosti 800 g. Ostatní potřebné veličiny odhadni.

$v_0 = 31,4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $m = 800\,\mathrm{g} = 0,8\,\mathrm{kg}$, $F = ?$

Během hodu působí atlet na oštěp silou a koná tedy práci, která se spotřebuje na zvýšení kinetické energie oštěpu z nuly a hodnotu v okamžiku odhození $\Rightarrow$ platí: $W = E_k$.

$$Fs = \frac{1}{2} m v^2$$

$F = \frac{mv^2}{2s}$ (musíme odhadnout dráhu, na které atlet urychluje oštěp – 1,5 m)

$$F = \frac{mv^2}{2s} = \frac{0,8 \cdot 31,4^2}{2 \cdot 1,5}\,\mathrm{N} = 260\,\mathrm{N}$$

Dodatek: V předchozím příkladu jde pouze o velmi přibližný odhad. Ve skutečnosti neurychluje atlet oštěp z klidu, protože už před vrhem s ním běží. Na druhou stranu musí při hodu urychlit i ruku, která je podstatně těžší.

Př. 13: Pod jakým úhlem musíme hodit těleso, aby se výška jeho výstupu rovnala délce doletu?

$x_{\max} = y_{\max}$, $\alpha = ?$

Zadání neobsahuje žádné číselné údaje, zkusíme použít podmínku pro dostřel a maximální výšku a dosadíme dříve odvozené vzorce.

$x_{\max} = y_{\max}$

$\frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ $\quad / \cdot 2g$

$2\sin 2\alpha = \sin^2 \alpha$ (použijeme vzorec $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$2 \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin^2\alpha$ $\quad / : (\sin\alpha \cdot \cos\alpha)$

$4 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha \Rightarrow \alpha = 75°58'$

Délka vrhu se rovna jeho výšce, pokud hodíme pod úhlem $75°58'$.

Shrnutí: